Prof. Dr. Eckhard Liebscher
Fachgruppe Mathematik

Wintersemester 24/25

Aufgabenserie 7 zur Vorlesung "Stochastik für Informatiker"

1. (X, Y) sei ein Zufallsvektor mit der Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} xy + x + \frac{1}{2}y & \text{für } x, y \in (0,1) \\ 0 & \text{für } x \text{ oder } y \notin (0,1). \end{cases}$$

Die Zufallsgrößen X und Y nehmen Werte aus dem Intervall $[0,1]$ an. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F(x,y)$, die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ sowie die Wahrscheinlichkeit $P(\frac{1}{3} \le X \le \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \le Y \le \frac{3}{4})$. Wie groß ist $E(X)$? Nutzen Sie ggf. Mathematica.

2. Die Aktien der Firma GlobalProf.it AG haben in einem Zeitraum von einer Woche einen Wertzuwachs zu verzeichnen, der normalverteilt ist mit dem Erwartungswert von 2 und der Varianz 70 (Einheit des Zuwachses Euro). Die Zuwächse verschiedener Wochen sind unabhängig. Die Aktie steht gerade bei 1000 Euro. Welche Verteilung besitzt der Wert der Aktie nach 10 Wochen? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Aktie nach 10 Wochen unter 1000 Euro bzw. über 1060 Euro steht? Geben Sie einen Wert x so an, dass mit Wahrscheinlichkeit 0.9 der Wert der Aktie größer als x ist.

3. Gegeben ist der Zufallsvektor (X, Y) mit der Dichte

$$f(x,y) = \begin{cases} 6e^{-2x-3y} & \text{für } x, y \in (0,\infty), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man zeige, dass X und Y unabhängig sind. Geben Sie die Randverteilungen von X und Y an (Typ der Verteilung, Parameter). Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X > 1, 1 \le Y \le 2)$.

4. Die Lebensdauer von Glühbirnen sei Weibull-verteilt mit Formparameter 2 und Erwartungswert 5 (Einheit 1000 Betriebsstunden). Fällt eine Glühbirne aus, wird sie durch eine andere ersetzt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens 20 Glühbirnen für den Zeitabschnitt von 80 000 Betriebsstunden benötigt? Verwenden Sie Näherungsformeln nach dem zentralen Grenzwertsatz. $\Gamma(1.5) = 0.88623$

5. Man untersuche die Kongruenzgeneratoren

$$\begin{aligned} \text{a) } x_{i+1} &= (5x_i + 3) \bmod 16, \quad x_0 = 6 \\ \text{b) } x_{i+1} &= (6x_i + 2) \bmod 16, \quad x_0 = 1 \\ \text{c) } x_{i+1} &= (17x_i + 2) \bmod 16, \quad x_0 = 1 \end{aligned}$$

hinsichtlich Periodizität. Überprüfen Sie, ob die in der Vorlesung angegebenen Bedingungen an einen Generator erfüllt sind. Tragen Sie für a) die Paare (x_{i-1}, x_i) in ein Koordinatensystem ein. Entstehen dabei Muster?

6. Untersuchen Sie den Kongruenzgenerator

$$x_{i+1} = (8x_i + 47) \bmod 100, \quad x_0 = 27$$

hinsichtlich Periodizität. Überprüfen Sie, ob die in der Vorlesung angegebenen Bedingungen an einen Generator erfüllt sind.

b) Geben Sie Werte $a, b \in \mathbb{N}$ an, so dass der Generator

$$x_{i+1} = (ax_i + b) \bmod 100, \quad x_0 = 2$$

eine Periodenlänge von 100 besitzt. Welche Werte aus dem Intervall [1,100] kann a annehmen, so dass der Generator eine Periodenlänge von 100 besitzt. Wie kann man den Generator zur Erzeugung von Zufallszahlen mit einer Gleichverteilung auf [0,1] und 8 Nachkommastellen verwenden?