Prof. Dr. Eckhard Liebscher
Fachgruppe Mathematik

Wintersemester 24/25

Aufgabenserie 5 zur Vorlesung "Stochastik für Informatiker"

1. Die Großbäckerei "SuperKnackBack" beliefert eine Reihe von Verkaufsfilialen. Von dem Brot der Sorte Krümerl ist bekannt, dass das Gewicht in Gramm normalverteilt ist mit dem Erwartungswert 1500 und der Varianz 900.

a) Ein Brot erfüllt den Qualitätsstandard für das Gewicht, wenn sein Gewicht zwischen 1460 und 1570 liegt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Brot ein Gewicht gemäß diesem Standard besitzt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, ein Brot mit mehr als 1545 zu bekommen?

c) Bestimmen Sie das Gewicht G so, dass mit Wahrscheinlichkeit 0.9 das Gewicht der Brote kleiner als G ist.

2. Gegeben ist eine Zufallsgröße X, die die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \text{ oder } x > 1, \\ a(x^2 - x^3) & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

besitzt. X nimmt also Werte im Intervall $[0, 1]$ an. Bestimmen Sie die Konstante a so, dass eine Dichtefunktion entsteht. Ermitteln Sie auch die entsprechende Verteilungsfunktion. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X im Intervall zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{4}{5}$ liegt?

3. Die zufällige Zeit zwischen dem Eintreffen zweier aufeinanderfolgender E-Mail-Briefe kann als exponentialverteilt angesehen werden. Im Mittel muss man vom Eintreffen eines E-Mail-Briefes bis zum Eintreffen des nächsten E-Mail-Briefes 30 Minuten warten.

a) Geben Sie den Parameter der Verteilung der Zeit zwischen dem Eintreffen zweier aufeinanderfolgender E-Mail-Briefe und die zugehörige konkrete Verteilungsfunktion an.

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der betreffende Nutzer mindestens 10 Minuten, aber nicht länger als 80 Minuten auf die E-Mail warten muss?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der betreffende Nutzer nach 75 Minuten seit dem letzten E-Mail-Brief immer noch keinen Brief erhalten hat?

d) Bestimmen Sie die Zeit t dafür, dass mit Wahrscheinlichkeit 0.7 bis zu dieser Zeit t den Empfänger eine E-Mail erreicht.

e) Wie groß ist die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass die nächste E-Mail nach $60+x$ Minuten eintrifft ($x > 0$) unter der Bedingung, dass nach einer Stunde noch keine E-Mail eingetroffen ist.

4. Die Lebensdauer X eines elektronischen Bauelements habe die Verteilungsfunktion

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-0.1x}(1 + 0.1x) & \text{für } x > 0, \\ 0 \quad \text{für } x \leq 0. \end{cases}$$

a) Wie lautet die Dichte? Um welche Verteilung handelt es sich?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Bauelement zwischen den Zeitpunkten 10 und 30 ausfällt.

c) Man ermittle den Erwartungswert und die Varianz.

5. Man bestimme folgende Quantile:

a) das 0.85-Quantil der Standard-Normalverteilung,

b) das 0.85-Quantil der Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 3$ und $\sigma^2 = \frac{1}{4}$,

c) das 0.9-Quantil der Exponentialverteilung mit dem Parameter $\lambda = 3$.

d) Wie groß ist der Median der Exponentialverteilung mit dem Parameter λ.

e) Wie groß ist der Median der Normalverteilung mit den Parametern $\mu = 4$ und $\sigma^2 = 277.8$.

6. Eine spezieller Typ von Festplatten benötigt $25ms$ für eine Umdrehung. Die Daten, die gelesen werden sollen, können sich an beliebiger Stelle auf der Platte befinden, wobei keine Stelle bevorzugt ist. Damit ist die Verzögerung, um an die entsprechende Position zum Lesen der Daten zu gelangen, stetig gleichverteilt auf dem Intervall [0,25].

a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Zeit größer als $18ms$ ist bzw. zwischen 7 und $14ms$ liegt.

b) Wie groß ist die mittlere Verzögerung? Wie groß ist die Varianz?

7. Wie muss man a, b wählen, damit

$$F(x) = \frac{a + bx}{1 + x} \quad (x \geq 0)$$

Verteilungsfunktion einer Zufallsgröße ist? Wie groß ist der Median dieser Zufallsgröße? Bestimmen Sie das Quantil der Ordnung 0.7.

8. Die mittlere Antwortzeit für Kundencomputer in einem Computersystem betrage $0.75s$, die minimale Antwortzeit $0.25s$. Untersuchungen haben gezeigt, dass die zufällige Antwortzeit in Sekunden durch eine Zufallsgröße $Y = 0.25 + X$ beschrieben werden kann, wobei X eine Exponentialverteilung besitzt.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Antwortzeit kleiner als $1s$ ist.

b) Geben Sie die Verteilungsfunktion und die Dichte von Y an.