



Entscheidungstheorie

Grundlagen-Skript

Prof. Dr. Th. Hagenloch
Hochschule Merseburg



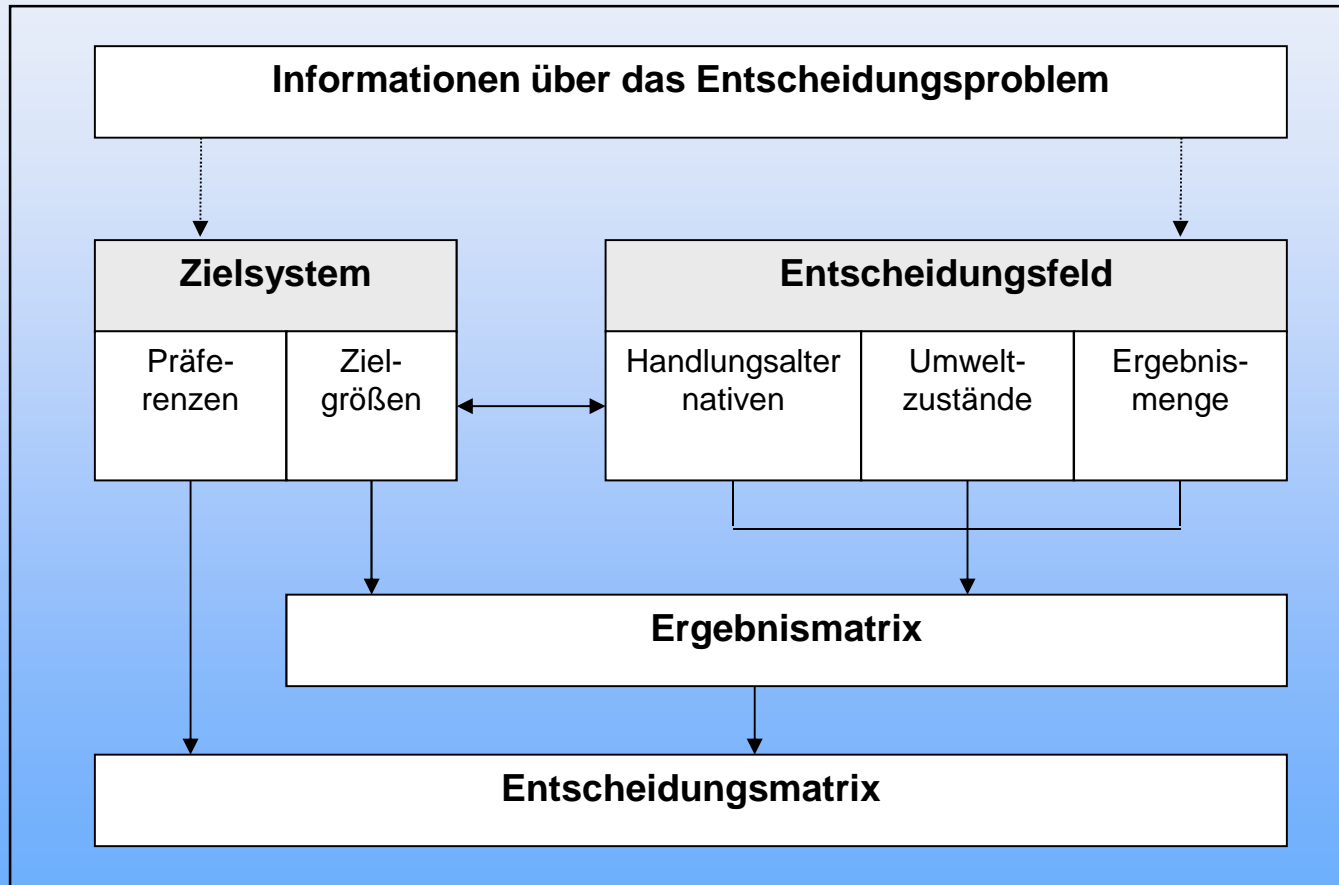
Entscheidungstheoretische Fragestellungen

1. **Normative** Entscheidungstheorie: Rationales Handeln des Entscheidungsträgers; Entscheidungsregeln. Entwicklung von „Richtlinien“, wie sich ein Entscheidungsträger in einer bestimmten Entscheidungssituation verhalten soll.

→ Eine Entscheidung erscheint dann rational, wenn diejenige Handlungsalternative gewählt wird, die unter den gegebenen Bedingungen zur größten Zielerreichung führt.
2. **Deskriptive** Entscheidungstheorie will das Zustandekommen von Entscheidungen in der Realität aufzuzeigen (reales Entscheidungsverhalten) Enge Bezüge zur Psychologie, Soziologie und zur Organisationstheorie.



Grundmodell





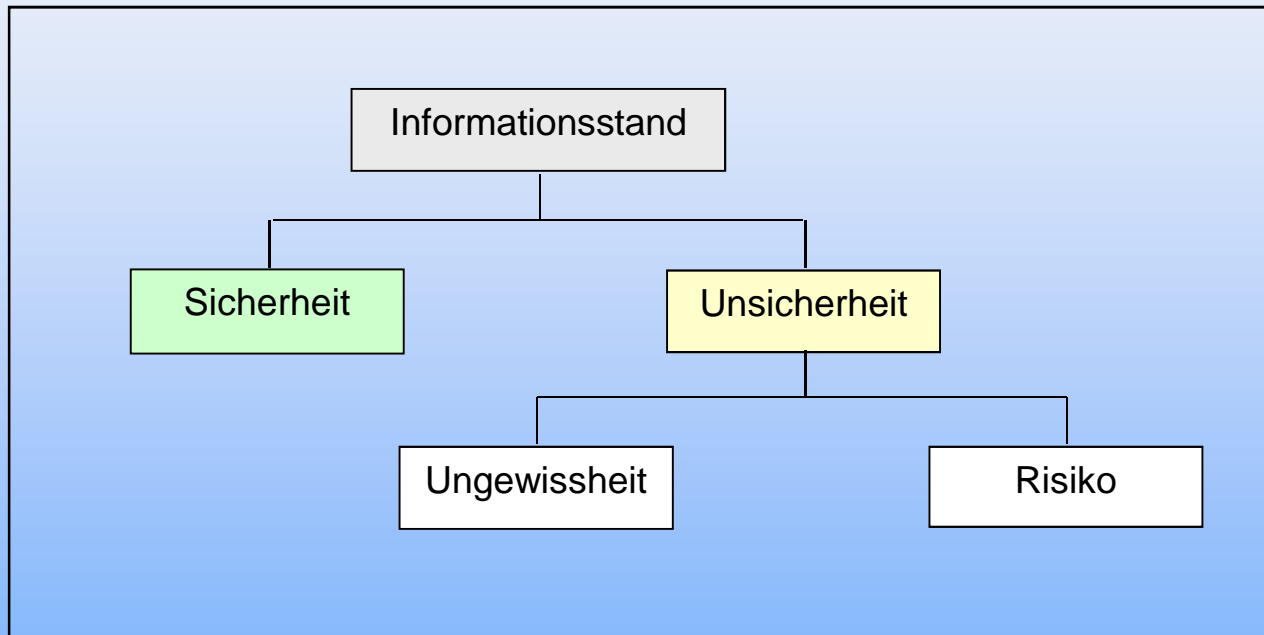
Grundmodell

| Aktionen \ Umweltzustände | s_1 (p_1) | s_2 (p_2) | ... | s_n (p_n) |
|---------------------------|--------------------|--------------------|-----|--------------------|
| a_1 | e_{11} | e_{12} | ... | e_{1n} |
| a_2 | e_{21} | e_{22} | ... | e_{2n} |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| a_m | e_{m1} | e_{m2} | ... | e_{mn} |

Ergebnismatrix (mit Wahrscheinlichkeiten)



Grundmodell



Bekanntheitsgrade über die Umweltzustände



Fallstudie

Siehe Vorlesung!



Fallstudie - Stadtfest

Heinz K. überlegt, wie er sich an dem diesjährigen Stadtfest aktiv beteiligen kann, um die Familienkasse aufzubessern. Hierbei zieht er in Erwägung, entweder einen Stand für Speisen oder einen Stand für Getränke einzurichten. Speisen und Getränke an einem Stand gleichzeitig anzubieten, ist hingegen unüblich. Aufgrund des hohen Arbeitsaufwandes, der mit der Bewirtung verbunden ist, überlegt Heinz K. außerdem, ob er eine Zusatzkraft einstellen soll.

Aktionen/Handlungsmöglichkeiten

- a_1 Stand mit Getränken einrichten und Zusatzkraft einstellen
- a_2 Stand mit Speisen einrichten und Zusatzkraft einstellen
- a_3 Stand mit Getränken einrichten, keine Zusatzkraft einstellen
- a_4 Stand mit Speisen einrichten, keine Zusatzkraft einstellen



Fallstudie - Stadtfest

Die allgemeine Konsumfreudigkeit der Besucher und das Wetter stellen relevante Umweltzustände dar, die wesentlichen Einfluss auf den Verkauf von Speisen und Getränken - und damit auf den realisierbaren Umsatz - ausüben. Heinz K. geht davon aus, dass bei gutem Wetter eine stärkere Nachfrage nach Getränken bestehen wird, bei schlechtem Wetter Speisen bevorzugt werden.

Umweltzustände

- s_1 hohe Konsumfreudigkeit und gutes Wetter
- s_2 hohe Konsumfreudigkeit und schlechtes Wetter
- s_3 geringe Konsumfreudigkeit und gutes Wetter
- s_4 geringe Konsumfreudigkeit und schlechtes Wetter



Fallstudie - Stadtfest

Heinz K. strebt als Zielgröße den Gewinn an, den er zu maximieren sucht. Für die Aufstellung der Ergebnismatrix ist zunächst die Ergebnisfunktion zu bestimmen. Ausgangspunkt hierbei sei folgende geschätzte monetäre Nachfrage:

| | Konsumfreudigkeit | | | |
|------------------------------|-------------------|----------|--------------------|----------|
| | hoch und Wetter | | niedrig und Wetter | |
| | gut | schlecht | gut | schlecht |
| Nachfrage Getränke | 14.000 | 12.000 | 11.000 | 6.000 |
| Nachfrage Speisen | 12.000 | 14.000 | 6.000 | 11.000 |

Wird eine Zusatzkraft beschäftigt, kann die Nachfrage vollständig befriedigt werden. Ohne Zusatzkraft können nur maximal 10.000 € zu Umsatz werden. Weiterhin sei angenommen, dass variable Kosten in Höhe von 40% des Umsatzes zu erwarten sind. An fixen Kosten für Platzmiete und Verkaufsstand fallen 2.700 €, für die Zusatzkraft 1.500 EURO an.



Fallstudie - Stadtfest

Aufgaben:

1. Wie lautet die Ergebnisfunktion?
2. Stellen Sie die Ergebnismatrix unter der Annahme auf, dass für den Eintritt der Umweltzustände folgende Wahrscheinlichkeiten gelten ($p_1, p_3 = 35\%$; $p_2, p_4 = 15\%$)!
3. Wie entscheidet sich Heinz K., wenn er risikoneutral ist und sich am mathematischen Erwartungswert orientiert?

Lösungen 1.:

$$e_{ij} = \text{Umsatz}(a_i, s_j) \cdot (1 - 0,4) - 2.700 - c(a_i) \cdot 1.500$$
$$\text{mit } c(a_i) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 1, 2 \\ 0 & \text{für } i = 3, 4 \end{cases}$$



Fallstudie - Stadtfest

Lösungen 2.:

| Aktionen \ Umweltzustände | Konsumfreudigkeit | | | |
|---|-------------------|--------------|--------------------|--------------|
| | hoch und Wetter | | niedrig und Wetter | |
| | gut | schlecht | gut | schlecht |
| | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 |
| | $p_1 = 0,35$ | $p_2 = 0,15$ | $p_3 = 0,35$ | $p_4 = 0,15$ |
| Getränkestand mit Zusatzkraft (= a_1) | 4.200 | 3.000 | 2.400 | -600 |
| Speisenstand mit Zusatzkraft (= a_2) | 3.000 | 4.200 | -600 | 2.400 |
| Getränkestand ohne Zusatzkraft (= a_3) | 3.300 | 3.300 | 3.300 | 900 |
| Speisenstand ohne Zusatzkraft (= a_4) | 3.300 | 3.300 | 900 | 3.300 |

Lösungen 3.:

$\Phi(a_1) = 2.670$; $\Phi(a_2) = 1.830$; $\Phi(a_3) = 2.940$; $\Phi(a_4) = 2460 \rightarrow a_3$ ist optimal!



Grundlagen

| Entscheidung bei | Nutzenfunktion | Spezifische Verfahren |
|---------------------------------------|--|---|
| Sicherheit (ein Ziel) | - | Lineare Optimierung (Kap 2.2) |
| Sicherheit (mehrere Ziele) | Additives Nutzenmodell (Kap. 2.3.1) | Zielgewichtung, Lexikographische Ordnung, „Körth“-Regel, Goal- Programming (Kap. 2.3.2) |
| Ungewissheit | - | Maximin-, Maximax-, Hurwicz, Laplace-, Savage-Niehans-Regel (Kap. 3.2) |
| Risiko | Erwartungsnutzen-Theorie (Kap. 4.4) | μ -Prinzip, (μ, σ) -Regel (Kap. 4.2/4.3) Theorem von Bayes (Kap. 5.2) |



Grundlagen

Eine Entscheidung bei Sicherheit ist dadurch charakterisiert, dass die Umwelt nur einen vorab bekannten Zustand einnehmen kann, dem je Zielart eindeutig ein Ergebniswert zugeordnet ist.

| Aktion \ Ziel | z_1 | z_2 | ... | z_k |
|---------------|---------|---------|-----|---------|
| a_1 | e_1^1 | e_1^2 | ... | e_1^k |
| a_2 | e_2^1 | e_2^2 | ... | e_2^k |
| ... | ... | ... | ... | ... |
| a_m | e_m^1 | e_m^2 | ... | e_m^k |

Zielgrößenmatrix (mit k Zielgrößen)



Spezielle Entscheidungsregeln

| | | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
|------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|
| (1) Zielgewichtung | | | | | |
| (2) Lexikographische Ordnung | a_1 | 4 | 10 | 12 | 8 |
| (3) Körth-Regel | a_2 | 3 | 10 | 9 | 6 |
| (4) Goal-Programming | a_3 | 9 | 8 | 6 | 9 |
| → Dominanzprinzip! | a_4 | 2 | 5 | 7 | 11 |
| | a_5 | 2 | 4 | 4 | 10 |

→ a_2 und a_5 sind ineffizient!



Spezielle Entscheidungsregeln

| Zielgewichtung | | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | $\Phi(a_i)$ |
|---|-------------|------------|------------|------------|------------|-------------|
| 1. Gewichtung der k Ziele mit den Anteilsgewichten $\lambda_1, \dots, \lambda_h, \dots, \lambda_k$ hierbei gilt $0 \leq \lambda_h \leq 1$ und $\sum_{h=1}^k \lambda_h = 1$ 2. Maximierung der Zielfunktion: $\Phi(a_i) = \sum_{h=1}^k \lambda_h \cdot e_i^h \rightarrow \text{Max!}$ | a_1 | 2 | 5 | 8 | 10 | 5,4 |
| | a_2 | 3 | 4 | 9 | 14 | 6,2 |
| | a_3 | 5 | 10 | 6 | 9 | 7,9 |
| | a_4 | 2 | 5 | 10 | 8 | 5,2 |
| | a_5 | 6 | 4 | 4 | 6 | 5,0 |
| | λ_h | 0,3 | 0,4 | 0,1 | 0,2 | |

→ Alternativenreihenfolge $a_3 \succ a_2 \succ a_1 \succ a_4 \succ a_5$

→ zu Besonderheiten siehe Buch, S. 36 f.



Spezielle Entscheidungsregeln

| Lexikographische Ordnung | | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
|---|---|-------|-------|-------|-------|
| Zunächst dient das wichtigste Ziel zur Alternativenordnung. Bei gleichem Zielerfüllungsgrad wird das zweitwichtigste Ziel herangezogen etc. | a_1 | 2 | 5 | 10 | 8 |
| | a_2 | 3 | 4 | 9 | 14 |
| | a_3 | 5 | 10 | 8 | 9 |
| | a_4 | 2 | 5 | 10 | 5 |
| | a_5 | 6 | 4 | 4 | 6 |
| | Präferenzordnung $z_3 \succ z_1 \succ z_4 \succ z_2$ | | | | |

→ Alternativenreihenfolge $a_1 \succ a_4 \succ a_2 \succ a_3 \succ a_5$



Spezielle Entscheidungsregeln

| Körth-Regel | | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | Zeilen-Min! |
|--|-------|-------|-------|-------|-------|-------------|
| Maximierung des minimalen Zielerreichungs-Grad! Optimal ist diejenige Alternative, die in Bezug auf den ungünstigsten Zielerreichungs-Grad unter allen Alternativen den größten Wert aufweist! | a_1 | 2/6 | 5/10 | 1 | 8/14 | 2/6 |
| | a_2 | 3/6 | 4/10 | 9/10 | 1 | 4/10 |
| | a_3 | 5/6 | 1 | 8/10 | 9/14 | 9/14 |
| | a_4 | 2/6 | 5/10 | 1 | 5/14 | 2/6 |
| | a_5 | 1 | 4/10 | 4/10 | 6/14 | 4/10 |

| | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | 2 | 5 | 10 | 8 |
| a_2 | 3 | 4 | 9 | 14 |
| a_3 | 5 | 10 | 8 | 9 |
| a_4 | 2 | 5 | 10 | 5 |
| a_5 | 6 | 4 | 4 | 6 |

→ a_3 ist optimal (gewährleistet in Bezug auf alle Ziele eine Erfüllung von ca. 64,3%). Keine andere Alternative ermöglicht einen höheren Prozentsatz hinsichtlich der Erfüllung aller Ziele!



Spezielle Entscheidungsregeln

| Goal-Programming | | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 | Zeilen-Summe |
|--|--|-------|-------|-------|-------|---------------------|
| Abweichungen von Zielvorgaben e_i minimieren! | a_1 | 10 | 3 | 4 | 2 | 19 |
| | a_2 | 9 | 4 | 5 | 8 | 26 |
| | a_3 | 7 | 2 | 6 | 3 | 18 |
| | a_4 | 10 | 3 | 4 | 1 | 18 |
| | a_5 | 6 | 4 | 10 | 0 | 20 |
| | $e_1 = 12, e_2 = 8, e_3 = 14, e_4 = 6$ | | | | | |

| | z_1 | z_2 | z_3 | z_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | 2 | 5 | 10 | 8 |
| a_2 | 3 | 4 | 9 | 14 |
| a_3 | 5 | 10 | 8 | 9 |
| a_4 | 2 | 5 | 10 | 5 |
| a_5 | 6 | 4 | 4 | 6 |

→ a_3 und a_4 sind optimal!
 (Alternativenreihenfolge) $a_3 \sim a_4 \succ a_1 \succ a_5 \succ a_2$



Kontroll- und Übungsaufgaben

→ Buch, Seite 40-42!



Grundlagen

Bei einem Entscheidungsproblem unter Ungewissheit handelt es sich um eine Situation mit mehreren möglichen Umweltzuständen, deren Eintrittswahrscheinlichkeiten dem Entscheidungsträger nicht bekannt sind.

→ Dominanzprinzip (Zustandsdominanz)

| | s_1 | s_2 | s_3 | s_4 |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | 6 | 5 | 8 | 3 |
| a_2 | 1 | 5 | 8 | 7 |
| a_3 | 5 | 10 | 8 | 9 |
| a_4 | 2 | 5 | 10 | 5 |
| a_5 | 6 | 4 | 4 | 6 |

Ein noch strengeres Prinzip ist die absolute Dominanz!

→ Schlechtester Wert der dominierenden Alternative ist besser als der beste Wert der dominierten Alternative!

→ Liegt nicht vor, da a_3 (5) kleiner als a_2 (8)

→ a_2 wird von a_3 dominiert!



Spezielle Entscheidungsregeln

| | | s_1 | s_2 | s_3 |
|--------------------------|-------|-------|-------|-------|
| (1) Maximax-Regel | | | | |
| (2) Maximin-Regel | | | | |
| (3) Hurwicz-Regel | a_1 | 32 | 17 | 11 |
| (4) Savage-Niehans-Regel | a_2 | 22 | 19 | 16 |
| (5) Laplace-Regel | a_3 | 25 | 22 | 4 |



Spezielle Entscheidungsregeln

| Maximax-Regel | | s ₁ | s ₂ | s ₃ | Maximax |
|---|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------------|
| Wähle diejenige Alternative, bei der das maximal mögliche Ergebnis maximiert wird! $\Phi(a_i) = \max_j e_{ij} \rightarrow \text{Max!}$ | a ₁ | 32 | 17 | 11 | 32 |
| | a ₂ | 22 | 19 | 16 | 22 |
| | a ₃ | 25 | 22 | 4 | 25 |
| | Optimale Alternative | | | | a₁ |



Spezielle Entscheidungsregeln

| Maximin-Regel | | s ₁ | s ₂ | s ₃ | Maximin |
|---|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------------|
| Wähle diejenige Alternative, bei der das minimal mögliche Ergebnis maximiert wird! $\Phi(a_i) = \min_j e_{ij} \rightarrow \text{Max!}$ | a ₁ | 32 | 17 | 11 | 11 |
| | a ₂ | 22 | 19 | 16 | 16 |
| | a ₃ | 25 | 22 | 4 | 4 |
| | Optimale Alternative | | | | a₂ |

Die Maximin-Regel kann allerdings zu Entscheidungen führen, die nicht als rational zu bezeichnen sind!

| | s ₁ | s ₂ | s ₃ | Minimum |
|----------------|----------------|----------------|----------------|---------|
| a ₁ | 1.000 | 0,99 | 100 | 0,99 |
| a ₂ | 1 | 1 | 1 | 1 |



Spezielle Entscheidungsregeln

| Hurwicz-Regel | | s ₁ | s ₂ | s ₃ | Hurwicz λ = 0,4 |
|--|----------------------------------|----------------|----------------|----------------|----------------------|
| Kombination aus Maximin- und Minimax-Regel! $\Phi(a_i) = \lambda \cdot \max_j e_{ij} + (1 - \lambda) \cdot \min_j e_{ij}$ mit $0 \leq \lambda \leq 1$ | a ₁ | 32 | 17 | 11 | 19,4 |
| | a ₂ | 22 | 19 | 16 | 18,4 |
| | a ₃ | 25 | 22 | 4 | 12,4 |
| | Optimale Alternative bei λ = 0,4 | | | | a₁ |

λ > 0,5: der Entscheider ist eher risikofreudig

λ = 0,5: der Entscheider ist risikoneutral

λ < 0,5: der Entscheider ist eher risikoscheu

Für λ = 0 (λ = 1) geht die Hurwicz-Regel in die Maximin-Regel (Maximax-Regel) über !

Entscheidungen bei Ungewissheit



Spezielle Entscheidungsregeln

| Savage-Niehans-Regel | | s ₁ | s ₂ | s ₃ | SNR |
|----------------------|--|----------------|----------------|----------------------|-----------|
| | Minimierung der maximalen Enttäuschung! (Minimierung der Schadensmatrix) $s_{ij} = \max_k e_{kj} - e_{ij} \rightarrow \text{Min!}$ | a ₁ | 32 | 17 | 11 |
| a ₂ | | 22 | 19 | 16 | 10 |
| a ₃ | | 25 | 22 | 4 | 12 |
| Optimale Alternative | | | | a₁ | |

| | s ₁ | s ₂ | s ₃ | Maximum |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|-----------|
| a₁ | (32-32) 0 | (22-17) 5 | (16-11) 5 | 5 |
| a₂ | (32-22) 10 | (22-19) 3 | (16-16) 0 | 10 |
| a₃ | (32-25) 7 | (22-22) 0 | (16-4) 12 | 12 |



Spezielle Entscheidungsregeln

| Laplace-Regel | | s ₁ | s ₂ | s ₃ | Laplace |
|---|----------------------|----------------|----------------|----------------|----------------------|
| Wähle diejenige Alternative, bei der die mit den jeweiligen Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichtete Ergebnissumme maximiert wird! $\Phi(a_i) = \sum_{j=1}^n p_j \cdot e_{ij}$ | a ₁ | 32 | 17 | 11 | 20 |
| | a ₂ | 22 | 19 | 16 | 19 |
| | a ₃ | 25 | 22 | 4 | 17 |
| | Optimale Alternative | | | | a₁ |

Prinzip des unzureichenden Grundes

Gleichwahrscheinlichkeit aller Umweltzustände: Die Begründung ist darin zu sehen, dass es bei Ungewissheit keinen Grund gibt anzunehmen, dass ein bestimmter Zustand eher eintreten wird als ein anderer.



Kontroll- und Übungsaufgaben

→ Buch, Seite 50!



Grundlagen

In einer Risikosituation ist der zukünftig eintretende Umweltzustand zum Entscheidungszeitpunkt unbekannt. Es ist dem Entscheidungsträger aber möglich, den relevanten Umweltzuständen (objektive oder subjektive) Eintrittswahrscheinlichkeiten zuzuordnen.

Objektive Anhaltspunkte zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeit liegen z.B. in folgenden Entscheidungssituationen vor:

- Teilnahme an Glücksspielen, staatlichen Lotterien etc.: Berechnung der Wahrscheinlichkeiten aufgrund kombinatorischer Überlegungen
- Abschluss eines Versicherungsvertrages: Schätzung von Wahrscheinlichkeiten für unterschiedliche Schadensfälle anhand des versicherungstechnischen Datenmaterials.
- Neu- oder Gebrauchtwagenkauf: Schätzung jährlicher Reparaturkosten oder Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die Lebensdauer z.B. auf Basis längerfristiger Kfz-Statistiken.
- Disposition bzgl. Lagerhaltung: Wahrscheinlichkeitsverteilungen für die pro Periode nachgefragte Menge der verschiedenen Güter können beispielsweise aus Zeitreihen früherer Perioden geschätzt werden.



Grundlagen

Dominanzkriterium und effiziente Alternativen bei Risiko

Eine Alternative a_i dominiert eine andere Alternative a_q nach dem Prinzip der **Wahrscheinlichkeitsdominanz**, wenn bei a_i die Wahrscheinlichkeit, mindestens einen Ergebniswert e' zu erzielen, nie kleiner und mindestens einmal größer als bei der Alternative a_q ist.

Formal gilt für Wahrscheinlichkeitsdominanz:

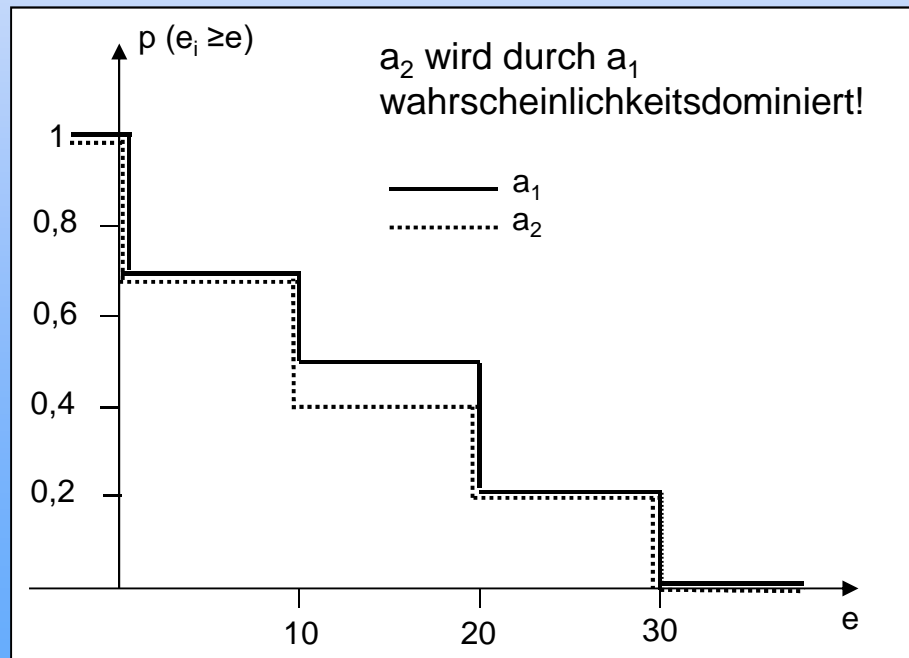
$$p(e_i \geq e') \geq p(e_q \geq e') \quad \text{für alle } e' \in \mathfrak{R} \quad \text{und}$$

$$p(e_i \geq e') > p(e_q \geq e') \quad \text{für mindestens ein } e' \in \mathfrak{R}$$



Beispiel zur Wahrscheinlichkeitsdominanz

| | s_1 $p_1 = 0,3$ | s_2 $p_2 = 0,2$ | s_3 $p_3 = 0,2$ | s_4 $p_4 = 0,3$ | e | 0 | 10 | 20 | 30 | >30 |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| | | | | | $p(e_1 = e)$ | 0,3 | 0,2 | 0,3 | 0,2 | 0 |
| a_1 | 20 | 10 | 30 | 0 | $p(e_2 = e)$ | 0,3 | 0,3 | 0,2 | 0,2 | 0 |
| | | | | | $p(e_1 \geq e)$ | 1 | 0,7 | 0,5 | 0,2 | 0 |
| a_2 | 0 | 30 | 20 | 10 | $p(e_2 \geq e)$ | 1 | 0,7 | 0,4 | 0,2 | 0 |



$$p(e_1 \geq e) \begin{cases} > p(e_2 \geq e) & \text{für } 10 < e < 20 \\ = p(e_2 \geq e) & \text{für } e \leq 10 \text{ und } e \geq 20 \end{cases}$$

Aus absoluter Dominanz/Zustandsdominanz folgt stets Wahrscheinlichkeitsdominanz, aber nicht umgekehrt!



Klassische Entscheidungskriterien

μ -Prinzip

Wähle die Handlungsalternative, bei der die Summe der wahrscheinlichkeitsgewichteten Ergebnisse maximal (minimal) ist!

Präferenz-/Zielfunktion:
$$\Phi(a_i) = \mu_i = \sum_{j=1}^n p_j \cdot e_{ij}$$

| | s_1 $p_1 = 0,5$ | s_2 $p_2 = 0,2$ | s_3 $p_3 = 0,3$ | $\Phi(a_i) = \mu_i$ |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| a_1 | 40 | 20 | 10 | 27 |
| a_2 | 120 | -30 | -20 | 48 |
| a_3 | 30 | 10 | 60 | 35 |

→ keine allgemeingültige Verhaltensnorm; subjektive Risikopräferenz eines Entscheiders wird beim μ -Prinzip vernachlässigt!

→ **a_2 ist optimal!**



Klassische Entscheidungskriterien

→ Kritik am μ -Prinzip
(Buch, Seite 56-58)



Klassische Entscheidungskriterien

(μ, σ) -Prinzip

Die mit den Alternativen verbundenen Ergebnisverteilungen werden nicht nur anhand ihres Erwartungswertes, sondern auch anhand ihrer Standardabweichung beurteilt.

$$\sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (e_{ij} - \mu_i)^2 \cdot p_j} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_i = \sqrt{\sum_{j=1}^n (p_j \cdot e_{ij}^2) - \mu_i^2}$$

Präferenz-/Zielfunktion: $\Phi(\mu_i, \sigma_i) = \mu - \alpha \cdot \sigma$

Der (vorzugebende) Parameter α bringt hierbei die spezifische Risikoeinstellung des Entscheidungsträgers zum Ausdruck:

- $\alpha > 0$: der Entscheidungsträger ist risikoscheu
- $\alpha < 0$: der Entscheidungsträger ist risikofreudig
- $\alpha = 0$: der Entscheidungsträger ist risikoneutral

→ (μ, σ)-Regeln können auch eine stärkere Gewichtung von μ oder anstelle der Standardabweichung σ die Varianz σ^2 in der Präferenzfunktion vorsehen!



Klassische Entscheidungskriterien

| | s_1 $p_1 = 0,5$ | s_2 $p_2 = 0,2$ | s_3 $p_3 = 0,3$ | $\Phi(a_i) = \mu_i$ |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| a_1 | 40 | 20 | 10 | 27 |
| a_2 | 120 | -30 | -20 | 48 |
| a_3 | 30 | 10 | 60 | 35 |

(μ, σ) -Regel:

$$\Phi(a_i) = 2\mu_i - 0,05 \cdot \sigma_i$$

$$\Phi(a_1) = 2 \cdot 27 - 0,05 \cdot 13,45 = 53,32$$

$$\Phi(a_2) = 2 \cdot 48 - 0,05 \cdot 72,08 = 92,39$$

$$\Phi(a_3) = 2 \cdot 35 - 0,05 \cdot 18,03 = 69,09$$

$$\sigma_1^2 = (40-27)^2 \cdot 0,5 + (20-27)^2 \cdot 0,2 + (10-27)^2 \cdot 0,3 = 181$$

$$\sigma_2^2 = (120-48)^2 \cdot 0,5 + ((-30)-48)^2 \cdot 0,2 + ((-20)-48)^2 \cdot 0,3 = 5.196$$

$$\sigma_3^2 = (30-35)^2 \cdot 0,5 + (10-35)^2 \cdot 0,2 + (60-35)^2 \cdot 0,3 = 325$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = 13,45; \sigma_2 = 72,08; \sigma_3 = 18,03$$

Alternative a_2 hat aufgrund der hier unterstellten **minimalen Risikoscheu** nach wie vor den größten Präferenzwert und wird gewählt.



Klassische Entscheidungskriterien

Der Präferenzwert ergibt sich auf Basis der durch die spezifische (μ, σ) -Regel festgelegten Funktionsvorschrift.

Hinsichtlich seiner Höhe lassen sich grundsätzlich folgende Fälle unterscheiden:

1. Bei *konstantem* Risiko (σ):

→ die Präferenzfunktion nimmt mit wachsendem Erwartungswert (μ) stets höhere Werte an, da ein höherer Erwartungswert generell als positiv bewertet wird.

2. Bei *konstantem* Erwartungswert (μ):

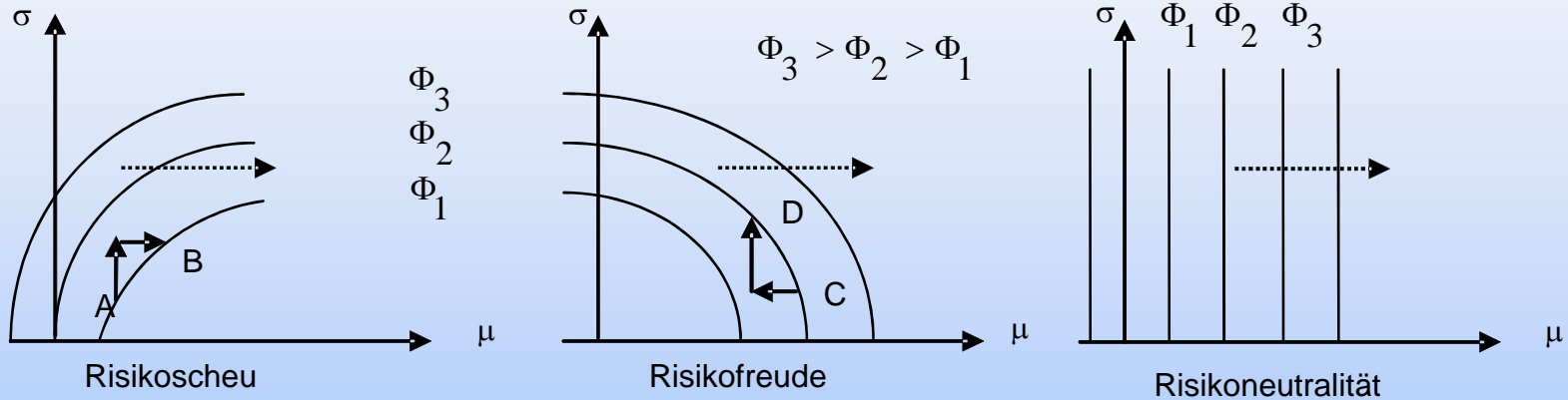
→ steigen die Präferenzwerte mit zunehmendem Risiko (=Risikofreude)

→ *sinken* die Präferenzwerte mit zunehmendem Risiko (=Risikoscheu).

→ ist die Präferenzfunktion im Fall der Risikoneutralität unabhängig von der Höhe des Risikos, es gilt das μ -Prinzip.



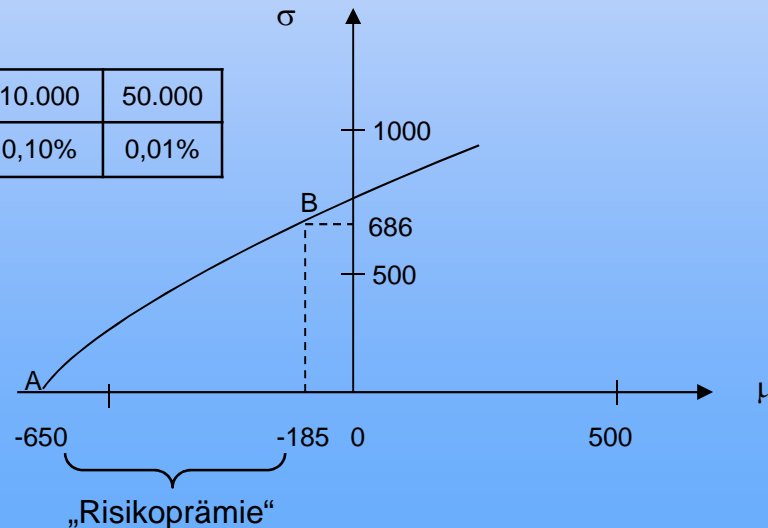
Klassische Entscheidungskriterien



| e | 0 | 100 | 500 | 1.000 | 5.000 | 10.000 | 50.000 |
|------|-----|-----|-----|-------|-------|--------|--------|
| p(e) | 30% | 50% | 19% | 0,50% | 0,39% | 0,10% | 0,01% |

$$\mu = -185$$

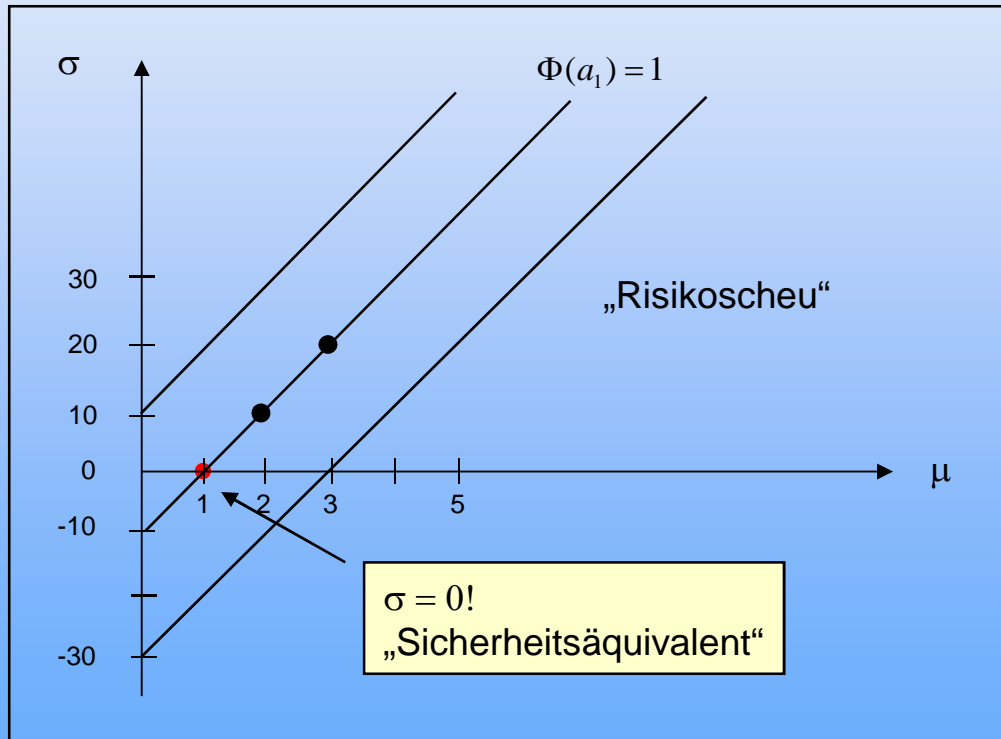
$$\sigma = \sqrt{\sum p_j \cdot (e_j - \mu)^2} = 686$$





Klassische Entscheidungskriterien

Beispiel $\Phi(a_i) = \mu_i - 0,1 \cdot \sigma_i \Rightarrow \sigma_i = 10 \cdot \mu_i - 10 \cdot \Phi(a_i)$
 $\Phi(a_1) = 1; \Phi(a_2) = 3; \Phi(a_3) = -1$





Klassische Entscheidungskriterien

Sicherheitsäquivalent S

Sicherer Betrag, der dem Entscheidungsträger als äquivalent mit der betrachteten unsicheren Alternative erscheint

→ Führt zum selben Präferenzwert wie die betrachtete Alternative

- Bei Risikoneutralität gilt: $S = E(X)$
- Bei Risikofeude gilt: $S > E(X)$
- Bei Risikoscheu gilt: $S < E(X)$

→ Siehe folgendes Beispiel



Klassische Entscheidungskriterien

| | s_1 $p_1 = 0,5$ | s_2 $p_2 = 0,2$ | s_3 $p_3 = 0,3$ | $\Phi(a_i) = \mu_i$ |
|-------|----------------------|----------------------|----------------------|---------------------|
| a_1 | 40 | 20 | 10 | 27 |
| a_2 | 120 | -30 | -20 | 48 |
| a_3 | 30 | 10 | 60 | 35 |

(μ, σ) -Regel:

$$\Phi(a_i) = 2\mu_i - 0,05 \cdot \sigma_i$$

Optimal war Alternative 2

$$\Phi(a_2) = 2 \cdot 48 - 0,05 \cdot 72,08 = 92,39$$

Sicherheitsäquivalent:

$$\rightarrow 92,39 = 2 \cdot S - 0,05 \cdot 0 \rightarrow S = 46,19$$

\rightarrow es ist damit kleiner als der Erwartungswert ($\mu_2 = 48$)

\rightarrow Risikoscheu!



Klassische Entscheidungskriterien

Große Bedeutung hat die Anwendung des (μ, σ) -Prinzips in der Portefeuille-Theorie gewonnen, die im Folgenden in ihren Grundzügen behandelt wird.

→ Präsentation Wertpapiermischung!



Erwartungsnutzenmodell (Bernoulli-Prinzip)

Petersburger Spiel

Bei diesem Gedankenexperiment wird eine (faire) Münze so lange geworfen (N-mal), bis zum ersten Mal „Zahl“ oben liegt. Der Spieler bekommt dann 2^N Geldeinheiten (GE) als Gewinn ausgezahlt: Erscheint „Zahl“ beim ersten, zweiten bzw. N-ten Wurf erhält der Spieler demnach 2^1 GE, 2^2 GE bzw. 2^N GE als Gewinn ausgezahlt.

→ Wahrscheinlichkeitsverteilung der Spielergebnisse

| | | | | |
|------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|-------------------------|
| e | 2 (=2 ¹) | 4 (=2 ²) | 8 (=2 ³) | ... 2 ⁿ ... |
| p(e) | 0,5 (= 2 ⁻¹) | 0,25 (=2 ⁻²) | 0,125 (=2 ⁻³) | ... 2 ⁻ⁿ ... |

Erwarteter Spielerlös

$$\mu = 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,25 + 8 \cdot 0,125 + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (2^k \cdot 2^{-k}) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty$$

→ aber: kaum jemand gibt mehr als 10-20 € für ein solches Spiel aus!



Erwartungsnutzenmodell (Bernoulli-Prinzip)

Nutzenfunktion

(Orientierung am Erwartungswert des Nutzens des Gewinns)

→ bei Bernoulli (1738): logarithmische Nutzenfunktion

→ Neumann/Morgenstern (1944): Axiomensystem (Buch S. 86)!

Nach dem Bernoulli-Prinzip ist die Alternative zu wählen, für die sich der größte Erwartungsnutzen ergibt. Hierzu sind die Ergebniswerte (gemäß der vorliegenden Funktionsvorschrift) in Nutzenwerte zu transformieren und der Erwartungswert dieser Nutzenwerte zu bestimmen.

$$\Phi(a_i) = E(u(e_{ij})) = \sum_{j=1}^n u(e_{ij}) \cdot p_j$$

Bezeichnung (häufig): Risikonutzenfunktion RNF



Erwartungsnutzenmodell (Bernoulli-Prinzip)

Beispiel

| Erg.- Matrix | z_1 | z_2 | z_3 | μ |
|-----------------|-------|-------|-------|---------------|
| a_1 | 81 | 144 | 225 | 136,80 |
| a_2 | 100 | 36 | 324 | 154,40 |
| a_3 | 121 | 196 | 169 | 150,40 |
| p_i | 0,5 | 0,2 | 0,3 | |

| $u(e) = \sqrt{e}$ | z_1 | z_2 | z_3 | $E u (e_{ij})$ |
|-------------------|-------|-------|-------|----------------|
| a_1 | 9 | 12 | 15 | 11,40 |
| a_2 | 10 | 6 | 18 | 11,60 |
| a_3 | 11 | 14 | 13 | 12,20 |
| p_i | 0,5 | 0,2 | 0,3 | |

Sicherheitsäquivalent:

$$E(u(e)) = E(u(S)) = u(S)$$

$$\sqrt{S} = 12,2 \Leftrightarrow S = 148,84$$

Ein sicherer Betrag von 148,84 € führt zu demselben Erwartungsnutzen wie bei a_3

S (148,84) < μ (150,40) → risikoscheu!

→ Entscheider wählt a_3 und verzichtet auf den höheren Erwartungswert von a_2 (risikoscheu)



Zur Wiederholung und Vertiefung

- Fallstudie (Kap. 4.5)
- Übungsaufgaben



Entscheidungen über Informationsbeschaffung

→ Siehe Kap. 5